О ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ СУММЫ СИНУСОИДАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В. А. Котельников

Научно-технический сборник Электротехнического института свзяи в Ленинграде. Вып. 14, Связьтехиздат, 1936, с. 54–62

ON THE INFLUENCE OF THE SUM OF SINUSOIDAL POTENTIALS UPON NON-LINEAR RESISTANCES

Содержание

На основе доказываемого автором представления многочлена в n-й степени в виде суммы произведений факториалов, автор дает метод определения амплитуд и фаз комбинационных частот при аппроксимировании нелинейной характеристики полиномом n-й степени.

Summary

The author represents a polynome of the nth power as the sum of the products of the factorials. On the base of this conception, the correctness of which is proved, a method of determinating the amplitude and phase of combined frequencies is given for the case of approximation of a non-linear characteristic to a polynome of the nth power.

1

В различных областях радиотехники часто приходится иметь дело с воздействием синусоидального напряжения или суммы синусоидальных напряжений на нелинейные сопротивления (например: на электронную лампу).

Для того чтобы подсчитать токи, получающиеся при таком воздействии, очень часто зависимость между током и напряжением представляют в виде степенного ряда:

$$i = i_0 + s_1 u^2 + \ldots + s_n u^n,$$

в который затем подставляют вместо u его значение:

$$u = \sum_{k=1}^{M} u_k \cos(\omega_k t + \varphi_k).$$

В результате получается очень громоздкое выражение, так как приходится разлагать члены:

$$u^N = \left[\sum_{k=1}^{M} u_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)\right]^N$$

на синусоидальные составляющие.

В настоящей статье выводится теорема, при помощи которой это разложение легко может быть получено, а также даются примеры на ее применение.

Кроме того очень часто полного разложения вовсе не нужно, так как бывает достаточно знать, какие частоты в результате получатся и каковы будут амплитуды и фазы лишь у некоторых, наиболее для нас интересных частот. Ответить на эти вопросы прямо, не производя полного разложения, также легко, пользуясь выводимой в этой статье теоремой.

2

Теорема.

При раскрытии выражения:

$$u^N = \left[\sum_{k=1}^{M} u_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)\right]^N \tag{А}$$

мы получим сумму косинусов, у которых:

а) угловые частоты будут:

$$n_1\omega_1 - n'_1\omega_1 + n_2\omega_2 - n'_2\omega_2 + \ldots - n'_M\omega_M; \tag{Б}$$

б) фазы соответственно будут:

$$n_1\varphi_1 - n'_1\varphi_1 + n_2\varphi_2 - n'_2\varphi_2 + \ldots - n'_M\varphi_M; \tag{В}$$

в) и амплитуды соответственно равны:

$$\frac{1}{2^{N-1}} \frac{N!}{n'!n'_1!n_2!n'_2!\ldots n'_M!} u^{n'+n'_1} u_2^{n_2+n'_2} \ldots u_M^{n_M+n'_M}. \tag{Г}$$

Здесь:

$$n_1,\ n'_1,\ n_2,\ n'_2,\ \ldots,\ n'_M$$

— любые целые положительные числа или нули, удовлетворяющие лишь условию:

$$n_1 + n'_1 + n_2 + n'_2 + \ldots + n'_M = N, \tag{Д}$$

причем хоть одна из разностей: $n_1 - n'_1$, $n_2 - n'_2$, ..., $n_M - n'_M$ должна быть отлична от нуля, а первая отличная от нуля должна быть положительной [1]).

Комбинации, в которых:

$$n_1 = n'_1;\ n_2 = n'_2;\ \ \ldots,\ n_M = n'_M, \tag{Е}$$

что возможно при N четном, дадут члены, не зависящие от t, равные:

$$\frac{1}{2^N}\frac{N!}{n_1!n'_1!n_2!n'_2!\ldots n'_M}u_1^{n_1+n'_1}u_2^{n_2+n'_2}\ldots u_M^{n_M+n'_M}. \tag{Ж}$$

Доказательство.

Заменим в выражении А:

$$u_k\cos(\omega_k t+\varphi_k) = u_k\cos x_k = \frac{1}{2}\left(u_k e^{jx_k} + u_k e^{-jx_k}\right) = \frac{1}{2}(a_k + a'_k), \tag{1}$$

где

$$x_k = \omega_k t + \varphi_k, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= u_k e^{jx_k},\\ a'_k &= u_k e^{-jx_k} \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Тогда его левая часть примет вид:

$$\left[\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{2}(a_k + a'_k)\right]^N. \tag{4}$$

Последнее выражение легко раскрыть, пользуясь формулой, доказанной в приложении:

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_M)^N = \sum\frac{N!}{n_1!n_2!\ldots n_M!}b_1^{n_1}b_2^{n_2}\ldots b_M^{n_M}, \tag{5}$$

где n_1, n_2, ..., n_M — целые положительные числа (некоторые из них могут быть нулями), составляющие все возможные комбинации при условии, что

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_M = N. \tag{6}$$

Применяя эту формулу к выражению (4), получим:

$$\begin{aligned} u^N &= \frac{1}{2^N}\frac{N!}{n_1!n'_1!n_2!n'_2!\ldots n'_M!}a_1^{n_1}{a'_1}^{n'_1}a_2^{n_2}{a'_2}^{n'_2}\ldots {a'_M}^{n'_M} =\\ &= \frac{1}{2^N}\sum\frac{N!}{n_1!n'_1!n_2!\ldots n'_M!}u_1^{n_1+n'_1}\ldots u_M^{n_M+n'_M}e^{j(n_1x_1 - n'_1x_1 + n_2x_2 - \ldots - n'_Mx_M)}. \end{aligned} \tag{7}$$

[1]) Напр., при $N = 11$ и $M = 3$ возможна комбинация $n_1 = 2$; $n'_1 = 2$; $n_2 = 1$; $n'_2 = 2$; $n_3 = 3$; $n'_3 = 1$, удовлетворяющая условию (Д). Однако ее нужно отбросить, так как первая неравная нулю разность $n_2 - n'_2 = -1$ отрицательна.

Комбинируя затем члены этой суммы, имеющие равные модули и противоположные по знаку показатели, попарно (такие члены получаются, если поменять значениями n_1 и n'_1, n_2 и n'_2 и т. д.), члены же, у которых $n_1 = n'_1$; $n_2 = n'_2$ и т. д., т. е. имеющие в показателе нули, оставляя без изменения и пользуясь формулой:

$$\frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) = \cos\alpha,$$

мы получим:

$$\begin{aligned} u^N = \frac{1}{2^{N-1}} \sum \frac{N!}{n_1!n'_1!n_2!\ldots n'_M!} u^{n_1+n'_1} \ldots u_M^{n_M+n'_M} \times \\ \times \cos(n_1x_1 - n'_1x_1 + n_2x_2 - \ldots - n'_Mx_M) + \\ + \frac{1}{2^N} \sum \frac{N!}{n_1!n'_1!n_2!\ldots n'_M!} u_1^{n_1+n'_1} \ldots u_M^{n_M+n'_M}. \end{aligned} \tag{8}$$

В первую сумму попадут все члены, у которых хоть одно n_k отлично от соответствующего n'_k, т. е. те, у которых выражение под косинусом не равно тождественно нулю. Кроме того из каждой пары членов первой суммы, отличающихся друг от друга лишь перестановкой значений: n_1 и n'_1, n_2 и n'_2 и т. д., один нужно отбросить, так как эти две комбинации были объединены в один косинус при переходе от ур. (7) к ур. (8). То, что одну из этих комбинаций нужно отбросить, можно учесть требованием, чтобы первая из разностей $n_k - n'_k$, отличная от нуля, была бы положительной (можно было бы с тем же успехом потребовать, чтобы она была отрицательной или наложить это условие на вторую или третью разность и т. д.).

Вторая сумма ур. (8) содержит лишь члены, у которых все $n_k = n'_k$, т. е. те члены, у которых в выражении (7) показатели были равны тождественно нулю. Вторая сумма дает члены, не зависящие от t. Если теперь в выражение (8) мы подставим значения x_k из ур. (2) и учтем все сказанное выше, то мы как раз получим доказываемую теорему [2].

3

Представление о количестве членов, получающихся при таком разложении выражения (A), дают таблицы I и II. Таблица I дает количество членов, зависящих от t, а таблица II — число членов, не зависящих от t. В этих таблицах обозначено: N — степень, в которую сумма возводится, а M — количество членов в этой сумме.

[2] Важно отметить, что величины u_1, u_2 и т. д. здесь могут быть и переменными, т. е. можно рассматривать и модулированные синусоидальные колебания. В этом случае в результате разложения будут также получаться модулированные колебания.

Таблица I

$N =$ \ $M =$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	1	4	9	16	25
3	2	10	28	60	110
4	2	16	60	160	350
5	3	28	126	396	1001
6	3	40	226	848	2 485
7	4	60	396	1 716	5 720
8	4	80	636	3 200	12 120
9	5	110	1 001	5 720	24 310
10	5	140	1 491	9 696	46 122

$$\frac{(N+2M-1)!}{2N!(2M-1)!}$$
при N нечетном

$$\frac{(N+2M-1)!}{2N!(2M-1)!} - \frac{\left(\frac{N}{2}+M-1\right)!}{\left(\frac{N}{2}\right)!(M-1)!}$$
при N четном

Таблица II

$N =$ \ $M =$	1	2	3	4	5
2	1	2	3	4	5
4	1	3	6	10	15
6	1	4	10	20	35
8	1	5	15	35	70
10	1	6	21	56	126

$$\frac{\left(\frac{N}{2}+M-1\right)!}{\left(\frac{N}{2}\right)!(M-1)!}$$

Как видим, число членов разложения может быть очень большим. Данные таблицы могут быть вычислены по формулам, приводимым рядом с ними.

4

Прежде чем приступить к приложению выведенной теоремы к отдельным примерам, остановимся еще на ряде положений, полезных для дальнейшего.

Определение.

Назовем комбинированной частотой n-го порядка из частот частоту:

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n. \tag{9}$$

В (9) $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — любые целые положительные или отрицательные числа или нули и

$$|k_1| + |k_2| + \ldots + |k_n| = N, \tag{10}$$

причем первое из k, не равных нулю, должно быть положительным.

Исходя из этого определения, мы можем вывести следствие.

Следствие.

При разложении выражения

$$\left[\sum_{k=1}^{M} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)\right]^N \tag{11}$$

мы получим все комбинированные частоты из $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_M$ всех четных порядков, меньших или равных N при N четном и всех нечетных порядков, меньших или равных N при N нечетном.

Доказательство.

Действительно, согласно теореме, у нас при разложении этого выражения получатся частоты:

$$n_1\omega_1 - n_1'\omega_1 + n_2\omega_2 - n_2'\omega_2 + \ldots - n_M'\omega_M, \tag{12}$$

причем:

$$n_1 + n_1' + n_2 + n_2' + \ldots + n_M' = N. \tag{13}$$

Обозначая:

$$\begin{aligned} n_1 - n_1' &= k_1, \\ n_2 - n_2' &= k_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n_M - n_M' &= k_M, \end{aligned} \tag{14}$$

мы получим величины $k_1, k_2, \ldots, k_M$, удовлетворяющие определению. Порядок комбинированной частоты (12) будет:

$$\begin{aligned} |k_1| + |k_2| + \ldots + |k_M| = n_1 + n_1' - 2n_1^* + n_2 + n_2' - 2n_2^* + \ldots + \\ + n_M + n_M' - 2n_M^* = N - 2(n_1^* + n_2^* + \ldots + n_M^*), \end{aligned} \tag{15}$$

где n_k^* — меньшее из чисел n_k и n_k'.

Из равенства (15) мы сразу видим, что порядок комбинированных частот будет меньше или равен N, причем он может отличаться от N лишь на четное число. Это является доказательством следствия.

Замечание 1

Если порядок комбинированной частоты, амплитуду которой мы хотим отыскать, ниже, чем степень члена, из которого она получается, то выражение (Б), необходимое для подсчета амплитуды, может быть получено добавлением к комбинированной частоте членов $(\omega_1 - \omega_1)$, $(\omega_2 - \omega_2)$ и т. д., пока не будет удовлетворено условие (Д). Например, выражение (Б) для комбинированной частоты $\omega_1 + \omega_2$, получившейся при возведении в четвертую степень, будет:

$$\omega_1 + \omega_2 + (\omega_1 - \omega_1) = 2\omega_1 - \omega_1 + \omega_2$$

и

$$\omega_1 + \omega_2 + (\omega_2 - \omega_2) = \omega_1 + 2\omega_2 - \omega_2.$$

Полученные выражения будут удовлетворять условию (Д).

Пример 1:

Дана лампа с характеристикой

$$i_a = i_0 + a_1 u_{st} + a_2 u_{st}^2 + a_3 u_{st}^3 + \ldots + a_n u_{st}^n,$$

где u_{st} — управляющее напряжение относительно рабочей точки. Требуется определить постоянную слагающую i_a, если:

$$u_{st} = u \cos(\omega t + \varphi).$$

Решение.

Постоянные составляющие получаются только от членов, содержащих u_{st} в четных степенях. Это видно прямо из теоремы, а также из того, что постоянная составляющая является комбинированной частотой нулевого порядка и, значит, может получиться согласно следствию, лишь из членов четных степеней.

Постоянная составляющая из члена второй степени будет иметь для нашего случая выражение (Б) в виде:

$$\omega - \omega,$$

и ее величина поэтому будет:

$$a_2 \frac{2!}{2^2 1!1!} u^2 = \frac{1}{2} a_2 u^2.$$

Для члена четвертой степени выражение (Б) будет:

$$2\omega - 2\omega$$

и величина постоянной составляющей:

$$a_4 \frac{4!}{2^4 2!2!} u^4 = \frac{3}{8} a_4 u^4.$$

Для члена степени n выражение (Б) будет:

$$\frac{n}{2}\omega - \frac{n}{2}\omega,$$

и величина:

$$a_n \frac{n!}{2^n \left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!}.$$

Вся постоянная составляющая будет равна сумме

$$I_a = i_0 + \frac{1}{2} a_2 u^2 + \frac{3}{8} a_4 u^4 + \ldots + \frac{n!}{2^n \left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!} a_n u^n.$$

Пример 2. Найти пятую гармонику анодного тока для условий предыдущего примера.

Решение. Нам надо найти амплитуду частоты 5ω.

Согласно следствию эта частота будет получаться от членов, содержащих u_{st} в нечетных степенях, больших или равных 5-й, т. е. от членов со степенями: 5, 7, 9 и т. д.

При вычислении амплитуды согласно теореме мы должны будем сначала найти величины n_1 и n_1', входящие в выражение для амплитуды, для чего нам нужно будет частоту 5ω представить так:

$$5\omega = n_1\omega - n_1'\omega,$$

причем $n_1 + n_1' = N$, где N — степень того члена, из которого мы отыскиваем частоту. Затем полученные величины n_1 и n_1' подставить в формулу для амплитуды.

Согласно этому:

1) от члена 5-й степени частота 5ω будет иметь амплитуду:

$$a_5\frac{5!}{2^4 5!}u^5 = \frac{1}{16}a_5u^5;$$

2) от члена 7-й степени частота 5ω, согласно замечанию, должна быть представлена так:

$$5\omega + (\omega - \omega) = 6\omega - 2\omega$$

и будет поэтому иметь амплитуду:

$$a_7\frac{7!}{2^6 6!1!} - u^7 = \frac{7}{64}a_7u^7;$$

3) от члена 9-й степени частота 5ω должна быть представлена так:

$$5\omega + 2(\omega - \omega) = 7\omega - 2\omega$$

и будет иметь амплитуду:

$$a_9\frac{9!}{2^8 7!2!} - u^9 = \frac{9}{64}a_9u^9;$$

4) от члена n-й степени частота 5ω должна быть представлена так:

$$5\omega + \frac{n-5}{2}(\omega - \omega) = \frac{n-5}{2}\omega + \frac{n-5}{2}\omega$$

и будет иметь амплитуду:

$$a_n\frac{n!}{2^{n-1}\left(\frac{n+5}{2}\right)!\left(\frac{n+5}{2}\right)!}u^n.$$

Согласно теореме, фазы всех этих составляющих будут равны 5φ, т. е. будут совпадать между собой. Поэтому результирующая амплитуда частоты 5ω будет просто суммой полученных амплитуд для этой частоты от отдельных членов.

Пример 3. Пусть на лампу с характеристикой первого примера воздействует напряжение:

$$u_{st} = u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + u_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$

Требуется определить амплитуду комбинированной частоты второго порядка $\omega_1 - \omega_2$. [3])

Решение. Данная частота согласно следствию будет получаться от всех четных степеней разложения характеристики.

1) Для члена второй степени выражение (Б) будет просто:

$$\omega_1 - \omega_2$$

и амплитуда этой частоты будет:

$$a_2 \frac{2!}{2 \cdot 1!1!} u_1 u_2 = a_2 u_1 u_2.$$

2) Для члена четвертой степени выражения (Б) будут, согласно замечанию:

(а) $$\omega_1 - \omega_2 + (\omega_1 - \omega_1) = 2\omega_1 - \omega_1 - \omega_2,$$

(б) $$\omega_1 - \omega_2 + (\omega_2 - \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_2,$$

(в) $$\omega_1 - \omega_2 + (\omega_3 - \omega_3) = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_3;$$

амплитуды для этих выражений будут соответственно:

(а) $$a_4 \frac{4!}{2^3 \cdot 2!1!1!} u_1^3 u_2 = \frac{3}{2} a_4 a_1^3 u_2,$$

(б) $$a_4 \frac{4!}{2^3 \cdot 1!1!2!} u_1 u_2^3 = \frac{3}{2} a_4 u_1 u_2^3,$$

(в) $$a_4 \frac{4!}{2^3 \cdot 1!1!1!1!} u_1 \cdot u_2 u_3^2 = 3 a_4 u_1 u_2 u_3^2,$$ [4])

фазы всех этих составляющих, согласно теореме, будут $\varphi_1 - \varphi_2$, и поэтому результирующая амплитуда будет равняться сумме отдельных амплитуд.

3) Для члена шестой степени выражения для частоты будут:

(а) $$\omega_1 - \omega_2 + 2(\omega_1 - \omega_1) = 3\omega_1 - 2\omega_1 - \omega_2,$$

(б) $$\omega_1 - \omega_2 + 2(\omega_2 - \omega_2) = \omega_1 + 2\omega_2 - 3\omega_2,$$

---

[3]) Этот пример соответствует кроссмодуляции на 1-м детекторе супергетеродинного приемника.

[4]) Член «в» дает кроссмодуляцию, т. е. разностная частота, даваемая этим членом, будет зависеть от амплитуды частоты.

(в) $$\omega_1 - \omega_2 + 2(\omega_3 - \omega_3) = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_3,$$

(г) $$\omega_1 - \omega_2 + (\omega_1 - \omega_1) + (\omega_2 - \omega_2) = 2\omega_1 - \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_2,$$

(д) $$\omega_1 - \omega_2 + (\omega_1 - \omega_1) = (\omega_3 - \omega_3) = 2\omega_1 - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_3,$$

(е) $$\omega_1 - \omega_2 + (\omega_2 - \omega_2) + (\omega_3 - \omega_3) = \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_2 + \omega_3 - \omega_3.$$

По этим выражениям легко вычислить амплитуды [5]. Фазы у всех составляющих будут:

$$\varphi_1 - \varphi_2.$$

Полезно отметить, что некоторыми членами можно пренебречь, не прибегая к вычислению их амплитуды. Так, напр., если считать u_1 много меньше u_2 и u_3, [6] то можно пренебречь членами, содержащими u_1 в степени выше 1-й, т. е. членами, для которых выражение (Б) содержит ω_1 больше, чем один раз. В этом случае у нас останутся составляющая от 2-й степени, от 4-й степени члены «б» и «в», от 6-й степени члены «б», «в» и «е».

5

Может встретиться еще другой тип задачи, когда требуется выписать все комбинированные частоты, получающиеся от данного члена. Чтобы не пропустить ни одного члена разложения и не взять дважды один и тот же, можно воспользоваться следующим замечанием:

Замечание 2

Для того чтобы выписать все комбинированные частоты, можно первоначально составить все комбинации амплитуд, возводимых в степень синусоид, пользуясь свойством, что сумма показателей должна равняться степени, в которую мы возводим (см. теорему). Затем выписать для каждой такой комбинации все комбинационные частоты, исходя из того, что $n_1 + n_1'$ будет показатель у u_1, $n_2 + n_2'$ — показатель у u_2 и т. д., согласно теореме.

Поясним на примере.

Пример 4.

Требуется выписать все комбинационные частоты, получающиеся от возведения в четвертую степень выражения:

$$u = u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + u_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$

---

[5] Если бы мы раскрывали для отыскания этих амплитуд сумму всех синусоид в 6-й степени полностью, то получили бы согласно таблицам I и II 236-й член.

[6] Соответствует обычным условиям на 1-м детекторе, если u_1 — амплитуда от принимаемой станции.

Выписываем все комбинации амплитуд, которые встретятся в членах разложения этого выражения. При этом будем исходить из того, что сумма показателей каждого члена должна равняться степени, в которую мы возводим, т. е. в нашем случае четырем. Получим:

$$u_1^4,\ u_1^3u_2,\ u_1^3u_3,\ u_1^2u_2^2,\ u_1^2u_2u_3,\ u_1^2u_3^2,\ u_1u_2^3,\ u_1u_2^2u_3,$$
$$u_1u_2u_3^2,\ u_1u_3^3,\ u_2^4,\ u_2^3u_3,\ u_2^2u_3^2,\ u_2u_3^3,\ u_3^4.$$

Затем выпишем комбинационные частоты для каждого их члена в том виде, как они нам понадобятся при вычислении амплитуды. Получим:

для
$$u_1^4\colon\ 4\omega_1,\ 3\omega_1-\omega_1,\ 2\omega_1-2\omega_1;$$
для
$$u_1^3u_2\colon\ 3\omega_1\pm\omega_2,\ (2\omega_1-\omega_1)\pm\omega_2;$$
для
$$u_1^3u_3\colon\ 3\omega_1\pm\omega_3,\ (2\omega_1-\omega_1)\pm\omega_3;$$
для
$$u_1^2u_2^2\colon\ 2\omega_1\pm2\omega_2,\ 2\omega_1+(\omega_2-\omega_2),\ (\omega_1-\omega_1)+2\omega_2,\ (\omega_1-\omega_1)+(\omega_2-\omega_2);$$
для
$$u_1^2u_2u_3\colon\ 2\omega_1\pm\omega_2\pm\omega_3,\ (\omega_1-\omega_1)+\omega_2\pm\omega_3;$$
и т. д.

Затем, если не надо вычислять амплитуду, можно, приведя подобные члены, упростить выражения для частот.

Приложение

Лемма.

Справедлива следующая формула

$$(b_1+b_2+\ldots+b_M)^N=\sum\frac{N!}{n_1!n_2!\ldots n_M!}b_1^{n_1}b_2^{n_2}\ldots b_M^{n_M}, \tag{а}$$

где в последней сумме $n_1, n_2, \ldots, n_M$ — целые положительные числа или нули, которые должны составлять все возможные комбинации, удовлетворяющие лишь условию

$$n_1+n_2+\ldots+n_M=N. \tag{б}$$

Доказательство.

Левую часть уравнения (а) можно представить так:

$$(b_1+b_2+\ldots+b_M)(b_1+b_2+\ldots+b_M)\ldots(b_1+b_2+\ldots+b_M). \tag{в}$$

Здесь число скобок должно равняться степени, в которую мы возводим, т. е. N. Раскрывая эти выражения, мы должны каждый член первой скобки помножить на каждый член второй, затем каждое из полученных произведений на каждый член третьей скобки и т. д. В результате мы получим произведения $b_1^{n_1} b_2^{n_2} \ldots b_M^{n_M}$, в которых $n_1, n_2, \ldots, n_M$ — целые положительные числа или нули, удовлетворяющие лишь условию (б) и принимающие все возможные комбинации.

При таком раскрытии окажется много одинаковых членов, и после их суммирования мы получим:

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_M)^N = \sum A(n_1, n_2, \ldots, n_M) b_1^{n_1} b_2^{n_2} \ldots b_M^{n_M}, \qquad \text{(г)}$$

где $A(n_1, n_2, \ldots, n_M)$ — число одинаковых членов $b_1^{n_1} b_2^{n_2} \ldots b_M^{n_M}$, получившихся при раскрытии.

Найдем величину $A(n_1, n_2, \ldots, n_M)$, для чего возьмем от выражения (г), как от тождества, частные производные n_1 раз по b_1, n_2 раз по b_2 и т. д.

После дифференцирования мы получим от левой части $N!$, так как общее количество дифференцирований будет N; а от правой части останется всего лишь один член суммы $A(n_1, n_2, \ldots, n_M) n_1! n_2! \ldots n_M!$, так как во всех членах с другими показателями мы обязательно хоть раз должны будем продифференцировать по одному из b_k большее число раз, чем его степень, и этим превратим их в нули.

Таким образом:

$$N! = A(n_1, n_2, \ldots, n_M) n_1! n_2! \ldots n_M!$$

или

$$A(n_1, n_2, \ldots, n_M) = \frac{N!}{n_1! n_2! \ldots n_M!}. \qquad \text{(д)}$$

Подставляя величину для A из уравнения (д) в уравнение (г), мы получим равенство (а), которое мы и хотим доказать.